АНАЛИЗ J–ПРОСТРАНСТВ И ВОПРОСЫ ИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

В.В. Липилина

Оренбургский государственный технический университет

Фундамент математики и её принципы являются настолько всеобщими и прочными, что они, будучи обосновано примененными, прекрасно работают везде. В рамках математики можно изобретать новые математические конструкции и исследовать, какие реальные процессы или явления им соответствуют. Довольно часто математическим изобретениям действительно удается найти их физические аналоги, уже воплощенные природой в своих структурах. Можно поступать и наоборот – конструировать математические описания для вновь открываемых физических, биологических, социальных и прочих закономерностей и эффектов, в том числе и воображаемой природы.

Как подчеркивает Н. Бурбаки, понятие математической структуры постепенно становится главным объектом современной математики, отодвигая числа и даже множества на второй план. Примером такой структуры, играющей важную роль в приложениях, является булева алгебра. Если структура представлена в терминах конкретно определенных правил преобразования её состояний, то в основу всех рассуждений кладется понятие действующего элемента, описываемого трансформацией (преобразованием) векторов. Структурные отношения обладают определенной устойчивостью, инвариантностью относительно различного рода внешних воздействий, в частности, относительно замены элементов структуры на идентичные им в математической структуре.

Рассматриваемый нами вопрос относится к алгебраической К–теории – разделу линейной алгебры, которая в основном занимается изучением К–функторов и имеет дело со структурной теорией проективных модулей и их групп автоморфизмов, иначе, это обобщение результатов о существовании и единственности (с точностью до автоморфизмов) базиса векторного пространства и других общих теоретико–групповых фактов о линейных группах над полями.

J–пространства построены от начальных моделей (пространств функций с системой различных областей определения) – через формулировку их аксиоматики – к “канонической реализуемости” J–пространств в классе исходных функциональных алгебр (группы подстановок – абстрактные группы – регулярная представимость групп по А. Кели). Таким образом, J–пространства дают аксиоматическое описание алгебраических функций с системой различных областей определения. Типичные примеры J-пространств образуют три вида функций: разноразмерные векторы, матрицы различных форматов и частичные отображения.

J–пространства относятся к классу простейших, в него попадают, в частности, все классические векторные пространства, так как они тривиальным образом представимы прямым произведением одноэлементной полурешетки на само пространство. (Здесь общеприняты термины: полурешетка – коммутативная полугруппа идемпотентов, «линеал» - линейное (векторное) пространство над некоторым полем). Другой полюс этого класса образуют сами полурешетки, ибо каждая из них тоже изоморфна произведению её на нулевой линеал. Основной же состав указанного выше класса образуют нетривиальные собственно J–пространства, представимые произведением неодноэлементных полурешеток и линеалов.

Для однозначности дадим определение термина:

J-пространство – это полугрупповой аналог классического векторного (=линейного) пространства, т.е. алгебра $T \overset{def}{=} \{T;+,(k\,F)\}$, в которой сложение [+] ассоциативно, коммутативно и обычным образом согласовано с оператором $\left[\cdot\,(k \in F)\right]$ умножения на элементы поля $F \overset{des}{=} < F;+,O,-1 >$: *для всех* $k, m \in F$ *и* $x, y \in T$ имеем: к·(х+у)= к·х+к·у и (k+m)·x= k·x+ m·x; верны также аксиомы: k·(m·x)=(km)·x, 1·x=x.

Основная структурная проблема алгебры заключается, во-первых, в установлении разложимости данной алгебраической системы на более простые компоненты, и, во-вторых, в нахождении конструктивной процедуры, позволяющей осуществлять обратное – восстановление, синтез рассматриваемой системы из совокупности подобных компонент. Всякое такое J-пространство представимо разбиением на составляющие векторные пространства. И обратно, если задана какая-либо система $\{T_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ векторных пространств T_ξ, то конструируется J-пространство, составляющими которого будут (с точностью до изоморфизма) и эти T_ξ. В [2] изложено решение задачи, по которому оказывается, что произвольное J-пространство изоморфно погружается в свою надалгебру с «крайними – наименьшим и наибольшим» составляющими.

В этой же оптимальной надалгебре находит положительное решение вопрос о так называемой «насыщаемости наибольшего» составляющего, что открывает подход к важной проблеме базиса в J-пространстве. (Здесь понятие «надалгебра J-пространства» заменяет громоздкую фразу «над J-пространство J-пространства», а «оптимальная» понимается в общепринятом смысле, а именно,- «наилучшая, наиболее благоприятная»). Тогда основной каркас построения оптимальной надалгебры и присоединения крайних составляющих по данному J-пространству T может представлять следующая схема:

$$\text{Над полем } F =< F;+,0,1 > \text{ имеем}:$$

$$1) T = \bigcup_{\xi\in\Xi(\ )} T_\xi \overset{def}{=} \bigcup_{\xi\in\Xi} \langle T_\xi;+,0_\xi,\cdot(k\in F)\rangle J-\text{пространство}(ЛП) \Rightarrow$$

$$H = \prod_{\xi\in\Xi} T_\xi \overset{dfs}{=} \left\langle \prod_{\xi\in\Xi} T_\xi;+,\Theta,\cdot(k\in F)\right\rangle - \text{классическое векторное пространство}(КВП),$$

$$\text{где } \Theta \overset{def}{=} \langle 0_\xi\rangle_{\xi\in\Xi} - \text{"}\Xi - \text{кортеж" идемпотентов из } T;$$

$$2) \wp = \{P \mid P \preceq H\} \overset{def}{=} \{P_\nu \mid \nu \in N\} \Rightarrow \langle \wp;\preceq\rangle \overset{\sim}{\Leftrightarrow} \langle \wp;\subseteq\rangle - \text{полная решётка } (ПР);$$

$$3) \forall_{\nu,\mu\in N}\left[\nu \le \mu \overset{def}{\Leftrightarrow} P_\nu \subseteq P_\mu\right] \Rightarrow \langle N;\le\rangle \overset{\sim}{\Leftrightarrow} \langle P;\subseteq\rangle \Rightarrow < N;\le > -ПР;$$

$$4) T_\xi^0 \overset{def}{=} \left\{\langle x_\rho\rangle_{\rho\in\Xi} \in H \mid \forall_{\rho\ne\xi} x_\rho = 0_\rho\right\} \Rightarrow T_\xi^0 \overset{def}{=} \langle T_\xi;+,\Theta;\cdot(k\in F)\rangle \preceq H \Rightarrow \Xi \subseteq N;$$

$$5) \begin{pmatrix} \forall_{\xi\in N}(\varepsilon\rangle \overset{def}{=} \{\nu \in N \mid \nu \le \varepsilon\}, \\ (N\rangle \overset{def}{=} \{(\varepsilon\rangle \mid \varepsilon \in N\} \end{pmatrix} \Rightarrow \langle (N\rangle;\subseteq\rangle \overset{\sim}{\Leftrightarrow} \langle N;\le\rangle \Rightarrow \langle (N\rangle;\subseteq\rangle - ПР;$$

$$6) L = \prod_{\nu\in N} P_\nu \overset{def}{=} \left\langle \prod_{\nu\in N} P_\nu;+,O,\cdot(k\in F)\right\rangle - КВП, \text{ где } O \overset{def}{=} \langle\Theta\rangle_{\nu\in N} - N - \text{кортеж из}$$

$$\text{нулевого элемента пространства } H;$$

$$7)\, R_\nu^{\triangleright} \overset{def}{=} \left\{ \langle z_\lambda \rangle_{\lambda \in N} \in L \,\middle|\, \forall_{\lambda \in N \setminus (\nu)} z_\lambda = \Theta \right\} \Rightarrow R_\nu^{\triangleright} = \left\langle R_\nu^{\triangleright}; +, O, \cdot (k \in F) \right\rangle \preceq L \quad (\nu \in N);$$

$$8)\, \forall_{\nu \in N} \left[\varphi_\nu (< z_\lambda >_{\lambda \in N}) \overset{def}{=} \begin{cases} < z_\lambda >_{\lambda \in (\nu)} \\ \langle \Theta \rangle_{\lambda \in N \setminus (\nu)} \end{cases} \Rightarrow \left(\varphi_\nu : L \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} R_\nu^{\triangleright} \right) \right] \& \forall_{\nu, \mu \in N} \varphi_\nu \circ \varphi_\mu = \varphi_{\nu \wedge \mu};$$

$$9) \begin{pmatrix} \forall_{\nu \in N} \hat{T} \overset{def}{=} \left\{ < \nu, u > \,\middle|\, u \in R_\nu^{\triangleright} \right\}, \\ \hat{T} = \bigcup_{\nu \in N} \hat{T}_\nu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \textit{полагая} \\ < \nu, u > + < \mu, \vartheta > \overset{def}{=} < \nu \wedge \mu, \varphi_{\nu \wedge \mu}(u + \vartheta) >, \\ k < \nu, u > \overset{def}{=} < \nu, ku >, O_\nu \overset{def}{=} < \nu, O > \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{T} = \bigcup_{\nu \in N} \hat{T}_\nu - \textit{ЛП}(\textit{"оптимальна"!});$$

$$10) \begin{pmatrix} \alpha = \inf \Xi, \omega = \sup \Xi; \Xi_0 = \Xi \cup \{\alpha, \omega\}; \overset{0}{T} \overset{def}{=} \bigcup_{\rho \in \Xi_0} \hat{T}_\rho, \\ \left(k, l \in F, a, в \in \overset{0}{T} \Rightarrow ka + lв \in \overset{0}{T} \right) \Rightarrow \overset{0}{T} \preceq \hat{T} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \overset{0}{T} = \hat{T}_\alpha (\bigcup_{\xi \in \mathrm{A}\Xi} \hat{T}_\xi) \cup \hat{T}_\omega, - \textit{ЛП} \\ \hat{T}_\alpha, \hat{T}_\omega - \textit{крайние в}\, \overset{0}{T} = \bigcup_{\rho \in \Xi_0} \hat{T}_\rho \end{pmatrix};$$

$$11)\, \forall_{\xi \in \Xi} (T_\xi \overset{\sim}{\leftrightarrow} T_\xi^0 \overset{\sim}{\rightarrowtail} R_\xi^{\triangleright} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \hat{T}_\xi) \Rightarrow \left(\bigcup_{\xi \in \Xi} T_\xi \overset{\sim}{\leftrightarrow} \bigcup_{\xi \in \Xi} T_\xi^0 \overset{\sim}{\rightarrowtail} \bigcup_{\xi \in \Xi} R_\xi^{\triangleright} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \bigcup_{\xi \in \Xi} \hat{T}_\xi \right) \&$$

$$\& \left(\bigcup_{\xi \in \Xi} R_\xi^{\triangleright} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \bigcup_{\xi \in \Xi} \hat{T}_\xi \right);$$

$$12)\, \bigcup_{\xi \in \Xi} T_\xi \overset{\sim}{\rightarrowtail} \bigcup_{\xi \in \Xi} \hat{T}_\xi \Rightarrow (T \overset{\sim}{\rightarrowtail} \hat{T}_\alpha \cup \left(\bigcup_{\xi \in \Xi} \hat{T}_\xi \right) \cup T_\omega) \textit{и}\; T_\alpha, T_\omega - \textit{"крайние"}.$$

$$\left(\textit{Здесь}: \overset{\sim}{\leftrightarrow} - \textit{изо...}, \overset{\sim}{\rightarrowtail} - \textit{моно...}, \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} - \textit{эпи...} - \textit{морфизмы} \right)$$

В нашем случае, для произвольного, не обязательно конечного набора индексов Ξ, обладающего каким–либо порядком или вовсе неупорядоченного, множество $\prod_{\xi \in \Xi} L_\xi$ - это совокупность всех «Ξ-кортежей» $\langle x_\rho \rangle_{\rho \in \Xi}$ таких, что $x_\rho \in L_\rho (\rho \in \Xi)$. И при осуществлении основной конструкции мы получаем некоторое утяжеление наглядности: «кортежи кортежей».

Из предложенной выше схемы видно, что для J-пространств решена основная структурная проблема алгебры и установлена регулярная представимость в классе биекций. J-пространства можно использовать при переходе от функциональных пространств на единой области определения к алгебрам функций, заданных на полурешетке различных множеств, несовпадение областей задания приводит к неодноэлементности множества нулевых функций «системы идемпотентов»- основной специфике J-пространств .

А в [8] (том 4, стр. 423) дается «функциональное» определение: $\prod_{\xi \in \Xi} L_\xi$ - множество таких функций $f : \Xi \to \bigcup_{\xi \in \Xi} L_\xi$, что $f(\xi) \in L_\xi$ для каждого $\xi \in \Xi$. Такая «функциональная интерпретация» позволяет делать описание главной из применяемых конструкций более простым.

Изучение теории J–пространств имеет не только классическое оправдание, но открывает, на наш взгляд, неплохие перспективы для развития самой теории, а также позволяет создать способы построения моделей, в частности, для нахождения приложений к построению пространств решений дифференциальных уравнений.

При анализе свойств J-пространств установлено, что она является решёточно-определяющейся, как всякая свободная полурешётка более чем с двумя свободными образующими. А следовательно, эти пространства возможно использовать в теории решёток. Известно, что наибольшее число приложений теории решёток связано с булевыми алгебрами, некоторые классы решёток используются в квантовой механике и физике. Таким образом, необходимо изучение теоретико-решёточных свойств J-пространств – дистрибутивности, модулярности, различных видов полумодулярности, дополняемости и т.д. Другой круг задач возникает при изучении свойств J-пространств в связи с различными способами задания. Это изучение метрических характеристик, связанных с задачей минимизации функций, задачами контроля и надёжности (по аналогии с задачей минимизации булевых функций, описывающих функционирование управляющих систем).

Вместе с тем встает задача поиска приложений в таких системах, в которых возможно абстрагирование от состава элементов и физического взаимодействия между ними, отношения между которыми могут быть самой разной природы (пространственные, временные, отношения доминирования корреляции и т. д.), то есть изучение классов структур, определяемых средствами этого формализованного языка. Одним из направлений поиска могут быть формальные технологии.

Формальные технологии оперируют с любыми – реальными или абстрактными – объектами формальным образом – то есть в соответствии со строгими формальными правилами, базирующимися на мощном математическом фундаменте. Причем, если математика работает в первую очередь с числовыми или кодовыми представлениями объектов, то формальные технологии – с любыми их представлениями – числовыми, геометрическими, модельными, физическими и т. д., то есть для представления любой технологии в формальном виде может быть использована структура очень близкая к структуре алгебраической системы в математике. Это и понятно: раз формальная технология является своеобразным расширением самой математики, то естественно, фундаментальные математические конструкции должны сохранять свою значимость и в рамках новой концепции. Согласно ей любая конкретная формальная технология может быть задана с помощью двух множеств – множество исходных (базовых) объектов операции («элементов базы») и множества самих операций над этими объектами, причем для саморазвивающихся технологических систем последнее множество может быть пустым.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М., 1984.
2. Вознякевич А.К. Условие продолжаемости некоторых отношений в J–пространствах. В: "Некоторые вопросы алгебраической теории чисел для конструктивных моделей", Алматы, 1985.
3. Вознякевич А.К. J–пространства, представимые произведением полурешетки на линеал. Некоторые пути совершенствования научной и методической подготовки физиков и математиков в педвузе. Сб. научных статей, Алматы, 1990.
4. Вознякевич А.К., Вознякевич Г. А. Конструкция, порождающая J–пространство. Вестник ЗКГУ, 2001, № 4.
5. Вознякевич А.К. Регулярное представление J–пространств. Сб. научных работ алгебраического семинара. ЗКГУ, 2003.
6. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1.- М., 1972.
7. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. МГУ. 1988.
8. Математическая энциклопедия. Т.Т. 1 – 5. -М., 1977 – 1985.